ЛЕКЦИЯ 5. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

§1. Понятие числовой последовательности

Определение. Пусть каждому числу n натурального ряда чисел 1,2, ..., n, ставится в соответствие некоторое число x_n. Тогда множество чисел

$$x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n,\ \ldots \qquad (1)$$

называется числовой последовательностью, или просто последовательностью. Отдельные числа x_n называются элементами или членами последовательности (1). Кратко последовательность (1) будем обозначать символом $\{x_n\}$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует число M (m) такое, что любой элемент x_n этой последовательности удовлетворяет неравенству

$$x_n \le M \qquad (x_n \ge m).$$

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если она ограничена и сверху и снизу, т.е. существуют числа M и $\boldsymbol{m}$ такие, что любой элемент x_n этой последовательности удовлетворяет неравенствам

$$m \le x_n \le M \qquad (2)$$

Обозначим $A = \max\{|m|, |M|\}$. Тогда условие (2) ограниченности последовательности можно записать в виде

$$|x_n| \le A$$

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется неограниченной, если для любого положительного числа A существует элемент этой последовательности, удовлетворяющий неравенству $|x_n| > A$.

§2. Предел последовательности

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся, если существует число a такое, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер N (зависящий от ε, и поэтому пишут $N(\varepsilon)$) такой, что при всех $n \ge \boldsymbol{N}$ элементы x_n этой последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$.

При этом число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$.

Если последовательность $\{x_n\}$ сходится и имеет пределом число a, то символически это записывают так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

§3. Свойства сходящихся последовательностей

Теорема 2.1. Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Теорема 2.2. (Необходимое условие сходимости последовательности). Сходящаяся последовательность ограничена.

Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - произвольные последовательности. По определению их суммой, разностью, произведением и частным называются соответственно последовательности:

$$\{x_n + y_n\},\ \{x_n - y_n\}, \{x_n \cdot y_n\} \text{ и } \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}.$$

В случае частного предполагается, что $y_n \neq 0$ для всех n.

Теорема 2.3. Пусть последовательности $\{x_n\}$и $\{y_n\}$ сходятся, при этом $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда сходятся и последовательности $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}, \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$, (последняя при $в\neq 0$, $y_n \neq 0$, $n = 1,2, ...$) и их пределы вычисляются по формулам:

$$\lim_{x\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b,\ \ \lim_{x\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b,\ \ \lim_{x\to\infty} x_n / y_n = a / b.$$

Теорема 2.4. Если элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \geq в$ ($x_n \leq в$), то и предел a этой последовательности удовлетворяет неравенству $a \geq в$ ($a \leq в$).

Теорема 2.5. Пусть даны три последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и$\{z_n\}$, связанные неравенствами $x_n \leq y_n \leq z_n$ для всех n. Тогда, если $\{x_n\}$и$\{z_n\}$ имеют один и тот же предел a, то $\{y_n\}$ также имеет предел, равный a.

§4. Монотонные последовательности. Число е

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется неубывающей (невозрастающей), если для всех номеров n справедливо неравенство

$$x_n \leq x_{n+1} \qquad\qquad (x_n \geq x_{n+1}).$$

Неубывающие и невозрастающие последовательности называются монотонными. Если же выполняется строгое неравенство

$$x_n < x_{n+1} \qquad\qquad (x_n > x_{n+1}),$$

то последовательность $\{x_n\}$называется возрастающей (убывающей). Возрастающие и убывающие последовательности называются так же строго монотонными.

Теорема 2.6. Если неубывающая (невозрастающая) последовательность ограничена сверху (снизу), то она сходится.

Теорема 2.7. Последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$сходится и ее предел называется числом e : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$

Число e играет важную роль в математике. Известен способ вычисления числа e любой степени точности: $e = 2{,}718281...$

§5. Понятие функции

Понятие функции является одним из основных понятий математического анализа. Как известно, к понятию функции приводит изучение двух переменных величин, изменение которых взаимообусловлено.

Пусть x – переменная величина, X – область ее изменения. Если каждому значению x из множества X ставится в соответствие по известному закону некоторое число y, то говорят, что на множестве X определена функция, и пишут $y=f(x)$.

При этом переменная x называется независимой переменной (или аргументом функции), множество X - областью определения функции $f(x)$, а число y, соответствующее данному значению аргумента x, - частным значением функции в точке x. Совокупность всех частных значений функции называется множеством значений функции $f(x)$.

В обозначении $y=f(\text{x})$ букву f часто называют характеристикой функции. Для обозначения аргумента, значения функции и ее характеристики могут употребляться различные символы.

§6. Основные элементарные функции

Основными элементарными функциями принято называть следующие функции:

1^0.Постоянная функция $y = c$, где c = const.

2^0. Степенная функция $y = x^{\alpha}$, где α - действительное число.

3^0. Показательная функция $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

4^0. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

5^0. Тригонометрические функции $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = tg x$, $y = ctg x$.

6^0. Обратные тригонометрические функции $y = \arccos x$, $y = \arcsin x$, $y= arctg\, x$, $y = arcctg\, x$.

§7. Элементарные функции и их классификация

Все функции, получаемые посредством конечного числа арифметических действий над основными элементарными функциями, а также получаемые путем суперпозиции этих функций, составляют так называемый класс элементарных функций.

Принята следующая классификация элементарных функций:

1^0. Функции вида $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} ... + a_n$, где $n \geq 0$ –целое число, $a_0, a_1, ..., a_n$- любые числа, называется целой рациональной функцией или алгебраическим многочленом (полиномом) степени n.

2^0. Функция, представляющая собой отношение двух целых рациональных функций: $R(x)=\dfrac{a_n x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{в_0 x^m + в_1 x^{m-1} + \ldots + в_m}$ называется дробно-рациональной функцией или просто рациональной дробью.

Совокупность целых рациональных и дробно-рациональных функций образует класс рациональных функций.

3^0. Функция, полученная путем конечного числа суперпозиций и четырех арифметических действий над степенными функциями как с целым, так и с дробными показателями, называется иррациональной функцией.

Совокупность рациональных и иррациональных функций образует класс алгебраических функций.

4^0. Всякая элементарная функция, не являющаяся алгебраической, называется трансцендентной.

§8. Предел функции

Пусть функция f(x) определена на некотором множестве X.

Точка x_0 ($x_0 \in X$ или $x_0 \notin X$) называется предельной точкой множества X, если в любой окрестности точки x_0 имеются точки множества X отличные от точки x_0.

Пусть x_0 - предельная точка множества X - области определения функции $f(x)$.

Определение 1 (по Гейне). Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для любой, сходящейся к x_0 последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента x, отличных от x_0, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к числу A.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ или $f(x)\to A$ при $x\to x_0$.

Определение 2 (по Коши). Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для любого положительного числа ε найдется отвечающее ему положительное число δ такое, что для всех x , удовлетворяющих условию $0<|x-x_0|<\delta$, справедливо неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. Первое и второе определения предела функции эквивалентны.

§9. Основные теоремы о пределах

Теорема 3.1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке пределы, равные A и B соответственно. Тогда функции $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(B\neq 0)$ имеют в точке x_0 пределы, соответственно равные $A\pm B$, $A\cdot B$ и $\dfrac{A}{B}$.

Теорема 3.2. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0, и функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке имеют предел, равный A, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$. Пусть, кроме того, выполняются неравенства $f(x)\le h(x)\le g(x)$. Тогда функция $h(x)$ имеет в точке x_0 предел, равный A, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$.

§10. Два замечательных предела

Теорема 3.3. Предел функции $h(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ в точке x=0 существует и равен единице, т.е. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Теорема 3.4. Предел функции $g(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ при $x\to\infty$ существует и равен числу e, т.е. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

§11. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой в точке x_0, если предел этой функции при $x\to x_0$ равен нулю.

Если функция $f(x)$ имеет предел при $x\to x_0$, равный A, то функция $\alpha(x)=f(x)$ - A является бесконечно малой в точке x_0.

Функция $g(x)$ называется бесконечно большой в точке x_0 справа (слева) функцией, если для любой сходящейся к x_0 последовательности $\{x_n\}$, все элементы которой больше (меньше) x_0, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$является бесконечно большой последовательностью. Для бесконечно большой в точке x_0 справа (слева) функции используется символика:

$$\lim_{x\to x_0+0} g(x)=\infty \quad (\lim_{x\to x_0-0} g(x)=\infty).$$

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - две бесконечно малые в точке x_0 функции, заданные для одних и тех же значений аргумента.

1^0. Говорят, что $\alpha(x)$ является в точке x_0 бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$.

2^0. Говорят, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются в точке x_0 бесконечно малыми функциями одного порядка, если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A,\quad A\ne 0.$$

3^0. Говорят, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются в точке x_0 эквивалентными бесконечно малыми, если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Для обозначения того, что $\alpha(x)$ является в точке x_0 бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$ используют следующую запись,

$\alpha(x) = o(\beta(x))$, (o –малое)

а для обозначения того, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми одного порядка - запись:

$\alpha(x) = O(\beta(x))$. (O–большое).

Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - эквивалентные бесконечно малые в точке x_0, то пишут: $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$.

Аналогично сравниваются две бесконечно большие функции.

Понятие эквивалентных бесконечно малых функций применяется, в частности, для вычисления пределов. С этой целью составлена таблица эквивалентных бесконечно малых функций.

Так при $u \to 0$ справедливы эквивалентности:

1. $\sin u \sim u$; 2. $1 - \cos u \sim u^2/2$; 3. $\mathrm{tg}\, u \sim u$;

4. $\arcsin u \sim u$; 5. $e^u - 1 \sim u$; 6. $\ln(1+u) \sim u$;

7. $(1+u)^m - 1 \sim m \cdot u$.